Vollständige Induktion

Beweisprinzip der vollständigen Induktion: Zu jeder natürlichen Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Alle Aussagen $A(n)$ sind richtig, wenn man beweisen kann:

- *I Induktionsanfang*: A(1) ist richtig
- *II Induktionsschritt*: Für jedes n, für welches $A(n)$ richtig ist, ist auch $A(n+1)$ richtig.

Man kann sich dies vorstellen wie das Umfallen einer Reihe von Dominosteinen. Es ist anschaulich klar, dass alle Dominosteine umfallen, wenn man den ersten Dominostein umschmeißt und sicherstellen kann, dass wenn ein Dominostein umfällt, auch der nachfolgende umfällt. In dieser Analogie ist dann also der n-te Dominostein die Aussage $A(n)$ und das Umfallen dieses Dominosteins der Beweis von $A(n)$.

Dieses Prinzip kann nicht „hergeleitet" oder „bewiesen" bewiesen werden, sondern ist Teil des Axiomensystems der natürlichen Zahlen. Eine axiomatische Charakterisierung der natürlichen Zahlen beinhaltet nämlich immer ein Axiom in der Art:

> Gilt für eine Teilmenge $B \subset \mathbb{N}$ der natürlichen Zahlen, dass $1 \in B$ und für jedes $n \in B$ auch $n+1 \in B$, dann ist schon $B = \mathbb{N}$.

Nimmt jetzt für B die Menge aller Indexe n, für die $A(n)$ wahr ist, also $B := \{n \in \mathbb{N} | A(n) \text{ ist wahr } \}$, so erhält man genau das Induktionsprinzip.

Nun ein Beispiel: *Gaußsche Summenformel:*
Für jede natürliche Zahl n gilt:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Beweis:

- *I Induktionsanfang:* Es ist $\sum_{\nu=1}^{1} \nu = 1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 2$.
- *II Induktionsschritt:*

  Induktionsvoraussetzung: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und für dieses n gelte $\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2} n(n+1)$.

  Dann ist

$$\begin{aligned} \sum_{\nu=1}^{n+1} \nu &= \sum_{\nu=1}^{n} \nu + (n+1) = \underbrace{\frac{1}{2} n(n+1)}_{\text{Induktionsvoraussetzung}} + (n+1) \\ &= (n+1)\left(\frac{1}{2} n + 1\right) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2), \end{aligned}$$

  und somit die Gültigkeit der Aussage auch für $(n+1)$ gezeigt.

Nach dem Induktionsprinzip gilt also für alle natürlichen Zahlen n:

$$\sum_{\nu=1}^{n} \nu = \frac{1}{2} n(n+1).$$

Häufige Fehler, die am Anfang gemacht werden sind:

- nur den Induktionsschritt machen, aber den Induktionsanfang vergessen. Damit kann man etwa zeigen, dass $n = n + 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
- Induktionsvoraussetzung: Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $A(n)$. *Macht man diese Annahme, so hat man nichts mehr zu beweisen, denn dies ist ja gerade die Behauptung.*
- Induktionsannahme: Es sei $n \in \mathbb{N}$ und es gelte $A(n + 1)$. Im Induktionsschritt wird jetzt unter Verwendung von $A(n)$ die Gültigkeit von $A(n + 1)$ gezeigt. *Hier wird einfach die falsche Annahme aufgeschrieben. Es macht natürlich keinen Sinn um $A(n + 1)$ zu zeigen, $A(n + 1)$ schon anzunehmen, vor allem, wenn man dann tatsächlich $A(n)$ verwendet.*