Rechnen mit Sinus und Cosinus

Solide handwerkliche Kenntnisse im Umgang mit Sinus und Cosinus können sehr hilfreich sein und das Leben sehr erleichtern, zum Beispiel beim Lösen von Integralen und bei sehr vielen Rechnungen in der Physik.

Grundlegende Formeln

Folgende Formeln sollte man auswendig können, die letzten Vier können unmittelbar durch einsetzen in die Zweite verifiziert werden.

$$\mathrm{e}^{ix} = \cos x + i \sin x$$

$$\sin x = \frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}, \ \cos x = \frac{\mathrm{e}^{ix} + \mathrm{e}^{-ix}}{2}$$

$$\sin(-x) = -\sin x, \ \cos(-x) = \cos x$$

$$\sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$$

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$$

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

Von den folgenden Beziehungen sollte man sich die „Tricks“ merken, sie auswendig zu lernen ist aber unnötig bis gefährlich, da man doch sehr leicht einen Vorzeichenfehler o.ä. macht und sein Gehirn mit unnötigem Ballast vollmüllt.

Doppelwinkelbeziehungen

Hilfreich sind folgende Doppelwinkelbeziehungen:

$$\begin{aligned}
\sin 2x &= \sin(x+x) = \sin x \cos x + \cos x \sin x = 2 \sin x \cos x \\
\cos 2x &= \cos(x+x) = \cos x \cos x - \sin x \sin x = \cos^2 x - \sin^2 x \\
&= \cos^2 x + \sin^2 x - 2\sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x \\
&= 2\cos^2 x - (\cos^2 x + \sin^2 x) = 2\cos^2 x - 1
\end{aligned}$$

Dies kann man nach $\cos^2 x$ beziehungsweise $\sin^2 x$ auflösen und erhält

$$\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \ \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}.$$

Man vergleiche den Aufwand $\int \sin^2 x \, \mathrm{d}x$ mit partieller Integration beziehungsweise mit obiger Identität zu lösen!

Summen von Sinus und Cosinus

Um $\sin x + \sin y, \sin x + \cos y, \ldots$ auszurechnen bedient man sich folgenden Tricks:

$$x = \frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2},\ y = \frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}$$

Damit wird dann beispielsweise

$$\begin{aligned}\sin x + \sin y =& \sin\left(\frac{x+y}{2} + \frac{x-y}{2}\right) + \sin\left(\frac{x+y}{2} - \frac{x-y}{2}\right)\\ =& \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} + \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\ &+ \sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - \sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}\\ =& 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}\end{aligned}$$

Potenzen von Sinus und Cosinus

Wie am Beispiel $\sin^2 x = \frac{1-\cos 2x}{2}$ schon gesehen, kann man $\sin^n x$ immer als Linearkombination von $\sin kx, \cos kx$ mit $k = 0,\ldots,n$ schreiben.

Um $\sin^n x, \cos^n x$ zu berechnen benutzt man am besten die Darstellung mit der e-Funktion sowie die binomische Formel und sortiert dann geschickt, hier am Beispiel von $\sin^3 x$:

$$\begin{aligned}\sin^3 x =& \left(\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right)^3 = -\frac{1}{8i}\left(\mathrm{e}^{3ix} - 3\,\mathrm{e}^{ix} + 3\,\mathrm{e}^{-ix} - \mathrm{e}^{-3ix}\right)\\ =& \frac{1}{4}\left(-\frac{\mathrm{e}^{3ix} - \mathrm{e}^{-3ix}}{2i} + 3\frac{\mathrm{e}^{ix} - \mathrm{e}^{-ix}}{2i}\right) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x\end{aligned}$$