Notation bei Funktionen

Kommt man aus der Schule, so erscheint einem die Schreibweise von Funktionen beziehungsweise Abbildungen in der Universität erst einmal ungewohnt. Dem soll dieser Artikel Abhilfe schaffen.

Zu einer Funktion gehören drei Dinge: Eine Ausgangsmenge X, eine Zielmenge Y und eine Vorschrift, die jedem Element $x \in X$ in eindeutiger Weise ein Element $f(x) \in Y$ zuordnet. Diese kann beliebig willkürlich sein, solange nur jedem $x \in X$ genau ein $f(x) \in Y$ zugeordnet wird. Eine Funktion muss man also insbesondere nicht durch einen Term in der Art $f(x) = x^4$ angeben können, sondern etwa auch die Vorschrift jedem Menschen seine Augenfarbe zuzuordnen wäre eine Funktion von der Menge aller Menschen in die Menge aller Farben.

Funktionen gibt man ganz allgemein an, als

$$f : X \to Y, x \mapsto f(x).$$

Dabei sind X,Y Mengen und $x \in X$ und $f(x) \in Y$; X heißt Definitionsmenge von f und für jedes $x \in X$ ist die Funktion definiert, also $f(x)$ bestimmbar. Für die Zielmenge Y sieht die Sache jedoch anders aus, man kann nur sagen, dass $f(x)$ in Y landet, aber *nicht*, dass es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt mit $f(x) = y$ („nicht jedes y muss getroffen werden“). Ist dies dennoch der Fall, so nennt man f surjektiv.

Von der Zielmenge Y muss man noch das Bild von f unter X unterscheiden. Dieses ist definiert als

$$f(X) := \{y \in Y | \text{es existiert ein } x \in X \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Das Bild $f(X)$ ist also die Menge aller von f tatsächlich angenommenen Funktionswerte („aller getroffenen y“). Offenbar ist f genau dann surjektiv, wenn $f(X) = Y$. Allgemeiner kann man für beliebige Teilmengen $A \subset Z$ das Bild von f unter A analog definieren als

$$f(A) := \{y \in Y | \text{es existiert ein } x \in A \text{ mit } y = f(x)\}.$$

Um die Begriffsbildung zu komplettieren: f heißt injektiv, falls gilt

$$\forall x_1, x_2 \in X : \ f(x_1) = f(x_2) \ \Rightarrow \ x_1 = x_2$$

(jedes y wird höchstens einmal getroffen). f heißt bijektiv, wenn f injektiv und surjektiv ist. Man kann dann jedem $y \in Y$ eindeutig ein $x \in X$ zuordnen, so dass $f(x) = y$ gilt. $f^{-1} : Y \to X$ mit dieser Vorschrift heißt die zu f inverse Abbildung, diese existiert nur für bijektive f.

Für beliebiges f kann man analog zum Bild aber das Urbild definieren, welches man auch mit f^{-1} bezeichnet (aber von der Umkehrfunktion f^{-1} unterscheiden muss!). Sei $B \subset Y$ eine Teilmenge von Y. Dann definiert man

$$f^{-1}(B) := \{x \in X | \text{es existiert ein } y \in B \text{ mit } f(x) = b\}.$$

In der Schule hat man sich meist damit begnügt, eine Funktion durch Angabe ihrer Funktionswerte zu charakterisieren, etwa $f(x) = x^2$. Man beachte aber, dass durch unterschiedliche Definitions- und Zielmengen vollkommen unterschiedliche Funktionen entstehen:

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$$
$$f_3 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}, x \mapsto x^2$$
$$f_4 : \mathbb{R}_{\geq 0} \to \mathbb{R}_{\geq 0}, x \mapsto x^2$$

f_4 ist nämlich bijektiv, f_3 injektiv , f_2 surjektiv und f_1 hat keine dieser Eigenschaften.